Funciones continuas en $\mathbb{R}^n$

Problemas propuestos

1. Demostrar que si f está definida para $x \geq 0$ por medio de $f(x) = \sqrt{x}$, entonces f es continua en todo punto de su dominio.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que si $f(x) = 0$ para x racionales, entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

3. Sean f y g funciones continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. ¿Es verdad que $f(x) = g(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $f(y) = g(y)$ para todos los números racionales de $\mathbb{R}$?

4. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es aditiva si satisface
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{para toda } x, y \in \mathbb{R}.$$
Demostrar que una función aditiva que es continua en $x = 0$ es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$.

5. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que satisface la relación
$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}.$$
Demostrar que si g es continua en $x = 0$, entonces es continua en todo punto. Además, si $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

6. Sea f una función lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
Demostrar que $f(x) \neq 0$ cuando $x \neq 0$ si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

7. Si $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un polinomio y $c \in \mathbb{R}$, demostrar que el conjunto $\{(x,y) : p(x,y) < c\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

8. Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}^p$ y $\alpha < \beta$, demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^p : \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$.

9. Demostrar que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^p$ es no conexo si y sólo si existe una función continua $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(D) = \{0, 1\}$.

10. Demostrar que todo polinomio de grado impar y coeficientes reales tiene una raíz real. Demostrar que el polinomio $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tiene al menos dos raíces reales.

11. Sea f una función continua de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que no toma ninguno de sus valores dos veces. ¿Es verdad que f debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente?

12. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Demostrar que si g toma cada uno de sus valores exactamente dos veces, entonces g no puede ser continua en todo punto de $[0,1]$.

13. Sea f continua en el intervalo $[0, 2\pi]$ a $\mathbb{R}$ y tal que $f(0) = f(2\pi)$. Demostrar que existe un punto $c \in [0, 2\pi]$ tal que $f(c) = f(c + \pi)$. Deducir que, en cualquier momento, existen puntos opuestos en el ecuador de la Tierra que tienen la misma temperatura. Sugerencia: Considerar $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$.

14. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$:

    (a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

    (b) $g(x) = \sin x$

15. Una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ es periódica si existe un número $p > 0$ tal que $g(x + p) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que una función periódica continua es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

16. Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua, demostrar que f tiene un punto fijo en $[0,1]$. Sugerencia: considerar $g(x) = f(x) - x$.

17. Dar un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que converja a una función continua pero en donde la convergencia no sea uniforme.

18. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ y para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a f.

19. Si $f(x) = x^2$ para $x \in [0,1]$, ¿qué grande debe ser n para que el enésimo polinomio de Bernstein B_n para f satisfaga $|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{1}{1000}$ para toda $x \in [0,1]$?

20. Demostrar que toda función continua de valor real, en el intervalo $[0, \pi]$ es el límite uniforme de una sucesión de "polinomios" en $\cos x$, es decir, de funciones de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos^2 x + \cdots + a_n \cos^n x$$

21. Encontrar un ejemplo de una aplicación continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un subconjunto cerrado $B \subset \mathbb{R}$ tales que $f(B)$ no sea cerrado. ¿Es esto posible si B es también acotado?

22. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y supongamos que $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ es conexo. Demostrar que A es conexo.

23. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0.56\}$. Demostrar que A es un conjunto cerrado. ¿Es compacto?

24. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua. Sea $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ la gráfica de f en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Demostrar que Γ es cerrada y conexa.

25. Demostrar que no existe una función continua f tal que $f([0,1]) = (0,1)$.

26. Si f y g son aplicaciones uniformemente continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, debe la función producto $f \cdot g$ ser uniformemente continua? ¿Qué ocurre si f y g son acotadas?

27. Demostrar el siguiente "lema del empalme": sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ y $g : [b,c] \to \mathbb{R}^m$ continuas. Definimos $h : [a,c] \to \mathbb{R}^m$ como $h = f$ en $[a,b]$ y $h = g$ en $[b,c]$. Si $f(b) = g(b)$, entonces h es continua.

28. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. ¿Debe f ser acotada?

29. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y supongamos que $x_n \to b$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe.

30. Sea $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Analizar el comportamiento de f cerca de $(0,0)$ con respecto de los límites

    (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

    (b) $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]$.

    (c) $\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]$.

31. Estudiar la continuidad en $P = (1,1,1)$ de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-y+z-2}{x+y-z-1} & si \quad x+y-z-1 \neq 0 \\ 0 & si \quad x+y-z-1 = 0 \end{cases}$$

32. Sea $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Demostrar que la función $f : A \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

no tiene límite en $(0,0)$.

33. Sea $A = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Probar que la función $f : A \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2+y} & si \quad y \neq -x^2 \\ 0 & si \quad y = x^2, x \neq 0 \end{cases}$$

tiene el mismo límite en $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta contenida en A que pase por $(0,0)$ y, sin embargo, tiene límites distintos a lo largo de cada parábola de la forma $y = \lambda x^2$.

34. Demostrar que las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tiene límite en $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta, pero no tienen límite en dicho punto:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{y+x^2} & si \quad y \neq -x^2 \\ 1 & si \quad y = x^2 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

35. Calcular (si existen) los límites ordinarios y reiterados en $(0,0)$ de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & si \quad y \neq -x \\ 0 & si \quad y = -x \end{cases}$.

(b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(c) $h(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{x}{y}) & si \quad y \neq 0 \\ x & si \quad y = 0 \end{cases}$.

36. Probar que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en todo conjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

37. Demostrar que la función $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, definida por $f(x,y) = \frac{xy}{x-1}$, no es uniformemente continua en A.