Espacios afines euclídeos

Test 1

1. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas

$$r_1 : \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 : \begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Dar el vector que describe la dirección y sentido del eje y' de una referencia ortonormal si queremos que las rectas anteriores se expresen como

$$r_1 : \begin{cases} x' = z' \\ y' = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 : \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases}$$

(a) $(0, 0, -1)$

(b) $(0, 0, 1)$

(c) $(0, 1, 1)$

(d) $(0, 1, -1)$

(e) $(0, -1, 1)$

2. En $\mathbb{R}^3$ sea $\{O; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ un sistema de referencia cualquiera. Sean las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones de la recta r perpendicular común a r_1 y r_2 y la distancia entre ellas en el sistema ortonormal $\{O; \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3\}$, siendo

$$\mathrm{e}_1 = 3\mathrm{u}_1 \quad \mathrm{e}_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{u}_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{u}_2 \quad \mathrm{e}_3 = 2\mathrm{u}_3$$

(a)

$$r : \begin{cases} 2x = y \\ 5z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad d(r_1, r_2) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

(b)

$$r : \begin{cases} 2x = y \\ 5z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad d(r_1, r_2) = \frac{6}{31}\sqrt{93}$$

(c)

$$r : \begin{cases} 33x + 4y = 0 \\ 31z = 35 \end{cases} \quad \text{y} \quad d(r_1, r_2) = \frac{6}{31}\sqrt{93}$$

(d)

$$r : \begin{cases} 33x + 4y = 0 \\ 31z = 35 \end{cases} \quad \text{y} \quad d(r_1, r_2) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

(e) Ninguna de las anteriores

3. En $\mathbb{R}^2$ se considera la siguiente transformación

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) No se trata de un movimiento
(b) Es un giro de eje $(2 - \sqrt{3})x + y = 1$ y ángulo 30^{o}
(c) Es una simetría axial de eje $(-2 + \sqrt{3})x - y = 1$
(d) Es un giro de eje $(\sqrt{3} - 2)x + y = 1$ y ángulo 30^{o}
(e) Es una simetría axial de eje $(\sqrt{3} - 2)x + y = 1$

4. En $\mathbb{R}^3$ se considera el siguiente movimiento

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Es un movimiento helicoidal de eje $(1, 1, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle$
(b) Es una traslación de vector $(2, 0, 0)$
(c) Es la composición de una simetría especular respecto del plano $z = 0$ y una traslación de vector $(1, 0, 0)$
(d) Es la composición de una simetría especular respecto del plano $z = 1$ y una traslación de vector $(2, 0, 0)$
(e) Ninguna de las anteriores

5. Sea f una rotación de $\mathbb{R}^3$ de ángulo 120^{o} y eje

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

y g una simetría respecto del plano $\pi : x - y + z = 0$. Entonces, la matriz de $h = f \circ g$ en la base ordinaria de $\mathbb{R}^3$ es

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Ninguna de las anteriores

6. La distancia del punto $(1, 0, 2)$ al plano que pasa por $P = (2, -3, -4)$ y es ortogonal a los planos $\pi_1 : x + 2y - z = 8$ y $\pi_2 : 7x - 2y + z = 3$ es

   (a) $\frac{6}{\sqrt{5}}$
   (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
   (c) $\sqrt{2}$
   (d) $3\sqrt{5}$
   (e) Ninguna de las anteriores

7. El punto del plano

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda + \mu \\ y &= 1 - \lambda + \mu \\ z &= \lambda + \mu \end{aligned}$$

   más cercano al punto $(0, 2, 0)$ es el punto de coordenadas

   (a) $(1/2, 2, -1/2)$
   (b) $(1, 3, 0)$
   (c) $(-1/2, 2, 1/2)$
   (d) $(0, 2, 0)$

(e) Ninguna de las anteriores

8. ¿Para qué valores de a el área del triángulo determinado por los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, a, 1)$ es $\frac{1}{2}$?

   (a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
   (b) ± 1
   (c) para todo $a \in \mathbb{R}$
   (d) ± 2
   (e) Ninguna de las anteriores

9. Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ y $C = (1, 1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿cuál es el punto o los puntos P de la recta

$$x - 1 = y - 2 = z - 1$$

   que hacen que el paralelepípedo $ABCP$ tenga un volumen igual a 3?

   (a) $(3, 4, 3)$
   (b) $(1, 2, 1)$
   (c) $(3, 4, 3)$ y $(-3, -2, -3)$
   (d) $(1, 2, 1)$ y $(-1, 0, -1)$
   (e) Ninguna de las anteriores

10. Consideremos un tetraedro de vértices $A = (1, -1, 2)$, $B = (5, 0, 2)$, $C = (2, 0, 2)$ y D. Si D pertenece al semiespacio $\{(x, y, z) \in R^3 : z \geq 0\}$, el volumen del tetraedro es 3 y la proyección ortogonal de D sobre el plano $x + y + z = -1$ es el punto $P = (-2, -4, 5)$, entonces

    (a) $D = (-4, -6, 3)$
    (b) $D = (-6, -8, 1)$
    (c) $D = (1, -1, 8)$
    (d) $D = (-11, -13, -4)$
    (e) Ninguna de las anteriores