Cálculo de primitivas

Ejercicios resueltos

Primitiva de una función en un intervalo

Ejercicio 1 Calcular la primitiva F de la función $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $F(0) = 1$.

Solución: Una primitiva de f en $\mathbb{R}$ es la función $G(x) = x^2$ y, por tanto, todas las primitivas de f son de la forma

$$G + C$$

es decir, que $F(x) = x^2 + C_1$. De $F(0) = 1$ se sigue que $C_1 = 1$ y, por tanto,

$$F(x) = x^2 + 1$$

es la primitiva buscada. ■

Métodos de integración

Integrales inmediatas y quasi-inmediatas

Ejercicio 2 Calcular

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

Solución:

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln\left|e^x - e^{-x}\right| + C$$

■

Ejercicio 3 Calcular

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx &= \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\,dx \\ &= \sqrt{x^2 - 1} + C \end{aligned}$$

■

Ejercicio 4 Calcular

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx &= \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx \\
&= \arctan x^3 + C
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 5 Calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} \\
&= \arcsin(x-3)^2 + C
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 6 Calcular

$$\int \frac{2x-7}{x^2+9}\,dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-7}{x^2+9}\,dx &= \int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \frac{7}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1} \\
&= \ln\left|x^2+9\right| - \frac{7}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx \\
&= \ln\left|x^2+9\right| - \frac{7}{3}\arctan\frac{x}{3} + C
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 7 Calcular

$$\int (e^x+1)^2\,dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int (e^x+1)^2\,dx &= \int (e^{2x}+2e^x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + 2\int e^x\,dx + \int dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 8 Calcular
$$\int (x+1)^2 \sqrt{x}\, dx$$

Solución:
$$\begin{aligned}
\int (x+1)^2 \sqrt{x}\, dx &= \int (x^2+2x+1)\sqrt{x}\, dx \\
&= \int (x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x})\, dx \\
&= \int x^{\frac{5}{2}}\, dx + 2\int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx \\
&= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
&= 2\left(\frac{1}{7}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 9 Calcular
$$\int \frac{x-2}{3x^2-4x+3}\, dx$$

Solución:
$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{3x^2-4x+3}\, dx &= \frac{1}{6}\int \frac{6x-4}{3x^2-4x+3}\, dx - \frac{8}{6}\int \frac{dx}{3x^2-4x+3} \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{3\left[(x-\frac{2}{3})^2+\frac{5}{9}\right]} \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| - \frac{4}{9}\int \frac{dx}{\frac{5}{9}\left[\left(\frac{3x-2}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right]} \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| - \frac{4}{9}\frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{3x-2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\, dx \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| - \frac{4}{3\sqrt{5}}\arctan\frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}$$

■

Integración por partes

Ejercicio 10 Calcular
$$\int x \cdot \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Solución: Tomamos las siguientes partes:
$$\begin{aligned}
f(x) &= \arcsin x & f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
g'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & g(x) &= -\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Integrando, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\int x \cdot \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= -\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x + \int dx \\
&= -\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x + x + C
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 11 Calcular

$$I = \int (4 + 2x + x^2)\cdot e^{-2x}\,dx$$

Solución: Tomamos las siguientes partes:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 4 + 2x + x^2 & f'(x) = 2(1+x) \\
g'(x) = e^{-2x} & g(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}
\end{array}
$$

Integrando, obtenemos:

$$I = \int (4 + 2x + x^2)\cdot e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot(4 + 2x + x^2)\cdot e^{-2x} + \int (1+x)\cdot e^{-2x}\,dx$$

Sea $I_1 = \int (1+x)\cdot e^{-2x}\,dx$. La integraremos por partes, nuevamente, con:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 1 + x & f'(x) = 1 \\
g'(x) = e^{-2x} & g(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}
\end{array}
$$

Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int (1+x)\cdot e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\cdot(1+x)\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(1+x)\dot{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\cdot e^{-2x} + C
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}\cdot(4 + 2x + x^2)\cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}(1+x)\cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}\cdot e^{-2x} + C \\
&= -\frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 11)\cdot e^{-2x} + C
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 12 Calcular

$$I = \int x^3\cdot e^{-x^2}\,dx$$

Solución: Como el integrando es un polinomio de grado 3 multiplicado por la exponencial, parece apropiado integrar por partes. En este caso, el cálculo se simplifica si tomamos

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = x \cdot e^{-x^2} & g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{array}$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-x^2} + \int x \cdot e^{-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

■

Integración por cambio de variable

Ejercicio 13 Calcular

$$I = \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Solución: Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 2 \cdot \sin t \qquad dx = 2 \cdot \cos t\,dt$$

Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{2t \cdot \cos t}{\sqrt{4 - 4 \cdot \sin^2 t}}\,dt \\ &= \int \frac{2t \cdot \cos t}{2\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt = \int \frac{t \cdot \cos t}{\cos t}\,dt \\ &= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C \end{aligned}$$

■

Ejercicio 14 Calcular

$$I = \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Solución: Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1+t}\,2t\,dt \\ &= 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\,dt \\ &= 2\cdot\int (\frac{-2}{1+t} + t^2 - t + 2)\,dt \\ &= 2\cdot(-2\ln|1+t| + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t) + C \end{aligned}$$

Sustituimos t por su valor, y obtenemos

$$I = -4\cdot\ln|1+\sqrt{x}| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} + C$$

■

Ejercicio 15 Calcular

$$I = \int (\sin x)^3\cdot\cos x\,dx$$

Solución: Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$\sin x = t \qquad \cos x\,dx = dt$$

Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin x)^3\cdot\cos x\,dx \\ &= \int t^3\,dt \\ &= \frac{t^4}{4} + C \\ &= \frac{(\sin x)^4}{4} + C \end{aligned}$$

■

Integración de funciones racionales

Ejercicio 16 Calcular

$$I = \int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}\,dx$$

Solución: Buscamos las raíces del polinomio del denominador, haciendo el cambio $x^2 = y$:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4,\ y_2 = 1$$

Como $x = \pm\sqrt{y}$, las raíces del denominador serán

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$$

Por tanto,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$$

La descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

Multiplicamos ambos miembros por $(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$:

$$x^2 - x + 2 = A(x+2)(x^2-1) + B(x-2)(x^2-1) + C(x^2-4)(x+1) + D(x^2-4)(x-1)$$

Haciendo las operaciones e igualando los coeficientes de cada potencia en x, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 & &\text{(coeficientes de } x^3\text{)} \\ 2A - 2B + C - D &= 1 & &\text{(coeficientes de } x^2\text{)} \\ -A - B - 4C - 4D &= -1 & &\text{(coeficientes de } x^1\text{)} \\ -2A + 2B - 4C + 4D &= 2 & &\text{(coeficientes de } x^0\text{)} \end{aligned}$$

La solución del sistema es:

$$A = \frac{1}{3},\quad B = \frac{-2}{3},\quad C = \frac{-1}{3},\quad D = \frac{2}{3}$$

La integral se descompone de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{3}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{-2}{3}}{x+2}\,dx + \int \frac{\frac{-1}{3}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cdot \ln|x-2| - \frac{2}{3}\cdot \ln|x+2| - \frac{1}{3}\cdot \ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{3}\cdot \ln\left|\frac{x-2}{(x+2)^2}\right| + \frac{1}{3}\cdot \ln\left|\frac{(x+1)^2}{x-1}\right| + C = \frac{1}{3}\cdot \ln\left|\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+2)^2(x-1)}\right| + C \end{aligned}$$

■

Ejercicio 17 Calcular

$$I = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Solución: Podemos expresar la integral del modo siguiente:

$$I = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-2}\,dx$$

Hacemos el cambio

$$u = x^2 + 1 \qquad du = 2x\,dx$$

Obtenemos:

$$I = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{2}u^{-1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + C$$

■

Ejercicio 18 Calcular

$$I = \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

Solución: Las raíces del denominador son: $x = 0$ (doble) y $x = \pm 1$ (simples). Por tanto, podemos expresar el integrando como suma de fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{1}{x^2\cdot(1-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} - \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x}$$

Multiplicamos ambos miembros por $x^2\cdot(1-x^2)$:

$$1 = A\,x(1-x^2) + B\,(1-x^2) - C\,x^2(1+x) + D\,x^2(1-x)$$

Haciendo los cálculos, obtenemos:

$$-(A + C + D)\,x^3 - (B + C - D)\,x^2 + Ax + B = 1$$

Identificando los coeficientes, obtenemos:

$$\begin{array}{rcll} -A - C - D & = & 0 & (\text{coeficientes de } x^3) \\ -B - C + D & = & 0 & (\text{coeficientes de } x^2) \\ A & = & 0 & (\text{coeficientes de } x^1) \\ B & = & 1 & (\text{coeficientes de } x^0) \end{array}$$

La solución del sistema es:

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Podemos expresar la integral del modo siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{0}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} \\ &= \frac{-1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\ln|1-x| + \frac{1}{2}\cdot\ln|1+x| + C \\ &= \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \end{aligned}$$

■

Ejercicio 19 Calcular
$$I = \int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$$

Solución: La descomposición del denominador es
$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales. Por tanto, la descomposición de la función racional en suma de fracciones simples es de la forma siguiente:
$$\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2+1}$$

Multiplicamos ambos miembros por $(x-1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x - 1$:
$$x = A(1+x^2) + (Mx+N)(x-1)$$

Haciendo operaciones, obtenemos:
$$(A+M)x^2 + (N-M)x + (A-N) = x$$

Por identificación de coeficientes obtenemos el valor de A, M y N:
$$A = \frac{1}{2}, \quad M = -\frac{1}{2}, \quad N = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la integral puede expresarse de la forma
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + C. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 20 Calcular
$$I = \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$$

Solución: Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, debemos hacer la división de los dos polinomios:
$$x^2 + 1 = 1 \cdot (x^2 - 1) + 2$$

Por tanto,
$$I = \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx = \int dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

Para calcular la integral $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$, utilizaremos la descomposición en suma de fracciones simples. Sabemos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Por tanto,

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplicando ambos miembros por $(x-1)(x+1)$, obtenemos:

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

Haciendo los cálculos e identificando los coeficientes, resulta:

$$A = 1 \quad B = -1$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned} I &= x + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\ &= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 21 Calcular la integral

$$I = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Solución: El denominador es un polinomio con raíces complejas múltiples. En este caso, resulta conveniente utilizar el método de Hermite-Ostrogadski. Tenemos:

$$\begin{aligned} q(x) &= (1+x^2)^2 \\ q'(x) &= 4x(1+x^2) \end{aligned}$$

Por tanto, el mínimo común múltiplo de q y q' es

$$q_1(x) = 1 + x^2$$

y

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)} = \frac{(1+x^2)^2}{1+x^2} = 1 + x^2$$

Por tanto, según el método de Hermite-Ostrogadski, tenemos

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{1+x^2}\right)$$

Haciendo los cálculos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x^2)^2} &= \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C(1+x^2)-2x(Cx+D)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{(Ax+B)(1+x^2)+C(1+x^2)-2x(Cx+D)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{Ax^3+(B-C)x^2+(A+2D)x+B+C}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Identificando coeficientes, obtenemos:

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

■

Integración de funciones irracionales

Ejercicio 22 Calcular

$$\int \frac{1}{x^{1/2}-x^{1/4}}\,dx$$

Solución: Es una integral racional en $x^{1/2}$ y $x^{1/4}$, es decir es una integral del tipo 1. Como $4 = \text{m.c.m.}(2,4)$, hacemos el cambio de variable

$$x = t^4, \qquad dx = 4t^3\,dt$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^{1/2}-x^{1/4}}\,dx = \int \frac{4t^3}{t^2-t}\,dt \\
&= 4\int \frac{t^2}{t-1}\,dt \\
&= 4\cdot\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt \\
&= 4\int t\,dt + 4\int dt + 4\int \frac{1}{t-1}\,dt \\
&= 2t^2 + 4t + 4\ln|t-1| + C
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio,

$$I = \int \frac{1}{x^{1/2}-x^{1/4}}\,dx = 2x^{1/2} + 4x^{1/4} + 4\ln|x^{1/4}-1| + C.$$

■

Ejercicio 23 Calcular
$$I = \int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}\,dx$$

Solución: Es una integral del tipo 2:
$$\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{(x-1)^{1/2}+1}{(x-1)^{1/2}-1}$$
Como m.c.m.$(2,2) = 2$, hacemos el cambio
$$x - 1 = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$
Sustituyendo en la integral, obtenemos:
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}\,dx = \int \frac{t+1}{t-1}\,2t\,dt \\ &= 2\int (t + 2 + \frac{2}{t-1})\,dt \\ &= 2(\frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t-1|) + C \\ &= t^2 + 4t + 4\ln|t-1| + C \end{aligned}$$
Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos
$$I = (x-1) + 4\sqrt{x-1} + 4\ln|\sqrt{x-1}-1| + C.$$
■

Ejercicio 24 Calcular
$$I = \int \frac{1}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx$$

Solución: Podemos emplear la sustitución de Euler:
$$\sqrt{6+x-x^2} = xt + \sqrt{6}$$
Por tanto,
$$x = \frac{1-2t\sqrt{6}}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-2(-t^2\sqrt{6}+t+\sqrt{6})}{(1+t^2)^2}\,dt$$
Sustituimos en la integral:
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{\frac{-2(-t^2\sqrt{6}+t+\sqrt{6})}{(1+t^2)^2}}{\frac{-t^2\sqrt{6}+t+\sqrt{6}}{1+t^2}}\,dt \\ &= \int \frac{-2(-t^2\sqrt{6}+t+\sqrt{6})(1+t^2)}{(-t^2\sqrt{6}+t+\sqrt{6})(1+t^2)^2}\,dt \\ &= \int \frac{-2}{1+t^2}\,dt = -2\arctan t + C \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, resulta

$$I = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{6+x-x^2}-\sqrt{6}}{x}\right) + C.$$

■

Ejercicio 25 Calcular

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Solución: Hagamos el cambio (sustitución de Euler)

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = (1+x)t$$

Entonces

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

Por tanto,

$$1+x^2 = 1 + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1+t^4)}{(1+t^2)^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{2(1+t^4)}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\,dt \\
&= \int \frac{-4t(1+t^2)^3}{4t(1+t^4)(1+t^2)^2}\,dt \\
&= -\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt \\
&= -\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt - \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\arctan(\sqrt{2}t+1)+\arctan(\sqrt{2}t-1)) + C
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, resulta

$$I = \frac{-\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}-1\right)\right] + C.$$

■

Ejercicio 26 Calcular

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}\,dx$$

Solución: Es una integral racional en x y en $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Sin embargo, observamos que si hacemos el cambio

$$\sqrt{x^2+4x-4} = x+t$$

elevando al cuadrado resulta

$$x^2+4x-4 = x^2+2tx+t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2+4}{4-2t} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2(-t^2+4t+4)}{(4-2t)^2)}\,dt$$

Entonces

$$\sqrt{x^2+4x-4} = \frac{t^2+4}{4-2t} + t = \frac{-t^2+4t+4}{4-2t}$$

Sustituimos en la integral:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}\,dx \\
&= \int \frac{4-2t}{t^2+4}\cdot\frac{4-2t}{-t^2+4t+4}\cdot\frac{2(-t^2+4t+4)}{(4-2t)^2}\,dt \\
&= 2\int \frac{1}{t^2+4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{t}{2})^2}\,dt \\
&= \arctan\frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos:

$$I = \arctan\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+4x-4} - x) + C$$

■

Integrales binomias

Ejercicio 27 Calcular

$$I = \int x^5(1+x^3)^{1/4}\,dx$$

Solución: Es un integral binomia. Por tanto, hacemos primero el cambio

$$x^3 = t, \qquad dx = \frac{1}{3}\cdot t^{-2/3}\,dt$$

De esta forma, la integral queda

$$I = \int t^{5/3}(1+t)^{1/4}\cdot\frac{1}{3}\cdot t^{-2/3}\,dt = \frac{1}{3}\int t(1+t)^{1/4}\,dt$$

Hacemos ahora el cambio

$$1 + t = u^4, \qquad dt = 4u^3\,du$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int t(1+t)^{1/4}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int (u^4-1)\cdot u\cdot 4u^3\,du \\ &= \frac{4}{3}\int (u^8-u^4)\,du \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{u^9}{9}-\frac{u^5}{5}\right)+C \end{aligned}$$

Deshaciendo los cambios, resulta

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\left(\frac{(1+x^3)^{9/4}}{9}-\frac{(1+x^3)^{5/4}}{5}\right)+C \\ &= \frac{4(1+x^3)^{5/4}\cdot(5x^3-4)}{135}+C. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 28 Calcular

$$I = \int x^{2/3}(1+2x^{1/3})^{1/2}\,dx$$

Solución: Es una integral binomia, por lo que primero debemos hacer el cambio

$$x^{1/3} = t, \qquad dx = 3t^2\,dt$$

La integral queda de la forma siguiente:

$$I = \int t^2(1+2t)^{1/2}\cdot 3t^2\,dt = 3\cdot\int t^4(1+2t)^{1/2}\,dt$$

Como $q = 4$ es entero, efectuamos el cambio de variable

$$2t + 1 = u^2, \qquad dt = u\,du$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= 3\cdot\int t^4(1+2t)^{1/2}\,dt = 3\cdot\int\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^4\cdot u\cdot u\,du \\ &= \frac{3}{16}\cdot\int (u^2-1)^4\cdot u^2\,du \\ &= \frac{3}{16}\cdot\int (u^{10}-4u^8+6u^6-4u^4+u^2)\,du \\ &= \frac{3}{16}\cdot\left(\frac{u^{11}}{11}-\frac{4u^9}{9}+\frac{6u^7}{7}-\frac{4u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right)+C \end{aligned}$$

Como $u = (2t+1)^{1/2} = (2x^{1/3}+1)^{1/2}$, si deshacemos el cambio obtenemos

$$I = \frac{3(2x^{1/3}+1)^{11/2}}{176} - \frac{(2x^{1/3}+1)^{9/2}}{12} + \frac{9(2x^{1/3}+1)^{7/2}}{56} - \frac{3(2x^{1/3}+1)^{5/2}}{20} + \frac{(2x^{1/3}+1)^{3/2}}{16} + C.$$

■

Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 29 Calcular

$$I = \int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$$

Solución: Hacemos el cambio

$$\sin x = t, \qquad \cos x\,dx = dt$$

Como $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, entonces

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t)^2} \\
&= \frac{-1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\ln|1+t| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{4}\cdot\frac{2t}{1-t^2} + C
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, resulta

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} + C.$$

■

Ejercicio 30 Calcular

$$I = \int \frac{1}{1-2\sin x}\,dx$$

Solución: Es una integral del caso general, por lo que hacemos el cambio

$$\tan\frac{x}{2} = t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-2\frac{2t}{1+t^2}}\,dt \\
&= \int \frac{2}{1+t^2-2\frac{2t}{1+t^2}\cdot(1+t^2)}\,dt \\
&= \int \frac{2}{1+t^2-4t}\,dt \\
&= \int \frac{2}{(t-2-\sqrt{3})\cdot(t-2+\sqrt{3})}\,dt \\
&= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{t-2-\sqrt{3}}\,dt - \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{t-2+\sqrt{3}}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t-2-\sqrt{3}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t-2+\sqrt{3}| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}}\right| + C.
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio, resulta

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right| + C$$

■

Ejercicio 31 Calcular

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

Solución: Sabemos que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Entonces la integral se puede escribir como

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1+\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int \frac{2\sin 2x}{3+\cos 2x}\,dx$$

Es una integral del tipo 1, por lo que hacemos el cambio

$$\cos 2x = t, \qquad -2\sin 2x\,dx = dt$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$I = \int \frac{-dt}{3+t} = -\ln|3+t| + C$$

Deshaciendo el cambio, resulta

$$I = -\ln|3+\cos 2x| + C$$

■

Ejercicio 32 Calcular

$$I = \int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx$$

Solución: Es una integral del tipo general, por lo que hacemos el cambio $\tan\frac{x}{2} = t$, de donde obtenemos

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Substituimos en la integral:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt \\
&= \int \frac{2}{1+2t-t^2}\,dt \\
&= \int \frac{-2}{(t-1-\sqrt{2})\cdot(t-1+\sqrt{2})}\,dt \\
&= \int \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{t-1-\sqrt{2}}\,dt + \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{t-1+\sqrt{2}}\,dt \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}}\ln|t-1-\sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|t-1+\sqrt{2}| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right| + C
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

■

Ejercicio 33 Calcular

$$I = \int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx$$

Solución: Es una integral del tipo 2, con exponentes impares. Se puede escribir de la forma

$$I = \int \sin^2 x\cdot\cos^5 x\cdot\sin x\,dx$$

Como $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, entonces

$$\begin{aligned}
I &= \int (1-\cos^2 x)\cdot\cos^5 x\cdot\sin x\,dx \\
&= \int \cos^5 x\cdot\sin x\,dx - \int \cos^7 x\cdot\sin x\,dx \\
&= -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + C.
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 34 Calcular
$$I = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

Solución: Es una integral del tipo 2, con ambos exponentes pares y positivos. Recordamos que
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
La integral se puede expresar y resolver de la forma
$$\begin{aligned}
I &= \int \sin^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx \\
&= \int (\frac{1 - \cos 2x}{1})^2 \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx \\
&= \frac{1}{2^4} \int (1 - \cos^2 2x - 2\cos 2x) \cdot \sin^2 2x \, dx \\
&= \frac{1}{2^4} \int (\sin^2 2x + \cos^2 2x \cdot \sin^2 2x - 2 \cos 2x \cdot \sin^2 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{2^4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{2^4} \int \frac{\sin^2 4x}{4} \, dx - \frac{1}{2^3} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \, dx \\
&= \frac{1}{2^4} \cdot (\frac{1}{2} x - \frac{\sin 4x}{8}) + \frac{1}{2^4} \cdot \int \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 8x)}{4} \, dx - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\sin^3 2x}{6} + C \\
&= \frac{1}{2^5} x - \frac{1}{2^7} \sin 4x + \frac{1}{2^7} (x - \frac{\sin 8x}{8}) - \frac{1}{3 \cdot 2^4} \sin^3 2x + C \\
&= (\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}) x - \frac{1}{2^7} \sin 4x - \frac{1}{2^{10}} \sin 8x + \frac{1}{3 \cdot 2^4} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 35 Calcular
$$I = \int \sin 3x \cdot \cos 4x \, dx$$

Solución: Es una integral del tercer tipo. Sabemos que
$$\sin Ax \cdot \cos Bx = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A + B)x + \sin(A - B)x]$$
Por tanto,
$$\sin 3x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2} \cdot [\sin(3 + 4)x + \sin(3 - 4)x] = \frac{1}{2} (\sin 7x - \sin x)$$
Entonces la integral puede expresarse como
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{2} (\sin 7x - \sin x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sin 7x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\cos 7x}{7} + \frac{1}{2} \cdot \cos x + C$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x\right) + C.$$

■

Integración de funciones exponenciales

Ejercicio 36 Calcular

$$I = \int \frac{1}{\sinh x + \cosh x}\, dx$$

Solución: Sabemos que

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sustituimos en la integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}}\, dx \\ &= \int \frac{2}{2\, e^x}\, dx = \int e^{-x}\, dx \\ &= -e^{-x} + C. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 37 Calcular

$$I = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 1}\, dx$$

Solución: Como es una integral racional en e^x, hacemos el cambio

$$e^x = t, \qquad dx = \frac{1}{t}\, dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2}{t^2 + 2t + 1} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t}{t^2 + 2t + 1}\, dt \\ &= \int \frac{t}{(t+1)^2}\, dt \end{aligned}$$

Descomponemos el integrando en una suma de fracciones simples:

$$\frac{t}{(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{(t+1)^2} = A(t+1) + B$$

Identificando coeficientes, obtenemos

$$A = 1, \qquad B = -1$$

La integral queda de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1+t}\,dt - \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt \\ &= \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + C \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos:

$$I = \ln|e^x + 1| + \frac{1}{e^x + 1} + C.$$

■

Ejercicio 38 Calcular

$$I = \int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx$$

Solución: La integral es equivalente a

$$I = \int \frac{2^x}{1+(2^x)^2}\,dx$$

Como es una integral racional en 2^x, hacemos el cambio

$$2^x = t, \qquad dx = \frac{\log_2 e}{t}\,dt$$

Sustituimos en la integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{\log_2 e}{t}\,dt \\ &= \log_2 e \cdot \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \log_2 e \cdot \arctan t + C \end{aligned}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$I = \log_2 e \cdot \arctan 2^x + C = \frac{\arctan 2^x}{\ln 2} + C.$$

■