Espacios vectoriales

Parte 1: Teoría y ejemplos

Hacia el concepto de vector

La palabra "vector" es conocida de todos por la geometría. En el bachillerato, se estudió la clase de objetos que denominamos vectores en geometría plana o del espacio. Sin embargo, hay otras clases de objetos de la matemática que se comportan del mismo modo; comportarse del mismo modo significa poseer las mismas propiedades. Descubrir estas propiedades es el primer paso hacia la **generalización**.

El segundo paso es la **axiomatización**, es decir, elegir entre todas las propiedades descubiertas aquellas que permitan deducir todas las demás; estas propiedades se llaman entonces **axiomas**. Cualquier clase de objetos que satisfaga estos axiomas se dirá que se comportan como vectores.

El último paso es desarrollar la **teoría matemática** con base en los axiomas previamente elegidos. Los resultados que se obtienen de la teoría constituyen las propiedades de los vectores. Por tanto, cualquier clase de objetos que se comporten como vectores tendrán estas propiedades.

Según la teoría matemática, se llamará **vector** a cualquier elemento de un espacio vectorial. Es preciso pues definir el concepto de espacio vectorial.

Concepto de espacio vectorial

Para saber si un conjunto es un espacio vectorial es necesario comprobar que sobre él podemos definir dos operaciones. Una de ellas es interna, es decir, estable respecto a los elementos del propio conjunto y, la otra, es externa y su conjunto de operadores externo es un cuerpo conmutativo; decir que la operación es externa significa que es estable respecto a la actuación del cuerpo sobre los elementos del conjunto. Además, estas dos operaciones deben satisfacer unas determinadas propiedades, que se denominan axiomas.

Definición 1 Dado un cuerpo conmutativo K, sea E un conjunto arbitrario de objetos sobre los cuales se definen dos operaciones, la adición y la multiplicación por escalares (elementos de K). Por adición se entiende una regla para asociar con cada pareja de objetos u y v de E, un elemento u + v, llamado suma de u y v. Por multiplicación por escalares se entiende una regla para asociar con cada escalar λ de K y cada objeto u de E, un elemento λu, llamado producto de u por el escalar λ. Si los axiomas siguientes son satisfechos por todos los objetos u, v, w en E y todos los escalares λ, μ en K, entonces E recibe el nombre de espacio vectorial sobre K, y a los objetos en E se les denomina entonces vectores.

1. Si u y v son objetos de E, entonces u + v está en E (la adición es una operación interna)
2. u + (v + w) = (u + v) + w (la adición es asociativa)
3. u + v = v + u (la adición es conmutativa)
4. Existe un objeto 0 en E, denominado vector cero, tal que 0 + u = u + 0 = u (la adición posee elemento neutro)
5. Para cada u en E, existe un objeto $-$u en E, denominado opuesto de u, tal que u + ($-$u) = ($-$u) + u = 0 (la adición posee la propiedad del elemento simétrico)
6. Si λ está en K y u en E, entonces λu está en E (la multiplicación por escalares es una operación externa y su conjunto de operadores es K)
7. λ(u + v) = λu + λv
8. (λ + μ)u = λu + μu
9. λ(μu) = ($\lambda\mu$)u
10. 1u = u (1 es la unidad del cuerpo K)

Observación 1 Hacemos las siguientes observaciones importantes:

1. En la teoría de espacios vectoriales, el cuerpo K se fija de una vez para siempre y se llama el cuerpo base. Sus elementos se llaman escalares y se designan por letras griegas.
2. A los elementos de los espacios vectoriales se les llama vectores y se designan por letras minúsculas en negrita. Para distinguir el conjunto de su estructura de espacio vectorial, utilizaremos la siguiente notación: escribiremos E para referirnos simplemente al conjunto, y E para referirnos a su estructura de espacio vectorial sobre K.
3. En realidad, la distinción entre escalares y vectores no tiene ningún sentido matemático ya que como veremos más abajo los escalares se comportan también como vectores.
4. Se ha utilizado el mismo signo + para denotar dos operaciones distintas (la adición en K y la adición en el espacio vectorial), pero no da lugar a confusión si nos fijamos en los elementos que une el signo + en cada caso. Lo mismo puede decirse de la multiplicación en K y de la multiplicación por escalares.

5. El conjunto E dotado con la adición tiene la estructura de grupo conmutativo o abeliano al satisfacer los axiomas 1-5. Se supone en esta sección que el lector está familiarizado con las propiedades elementales de la teoría de grupos.

6. En particular, un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales se llama un espacio vectorial real, y un espacio vectorial sobre el cuerpo C de los números complejos, un espacio vectorial complejo.

7. El lector debe tener presente que, en la definición de espacio vectorial, no se especifica la naturaleza de lo que llamamos después vectores ni la de las operaciones que denominamos adición y multiplicación por escalares. Cualquier clase de objetos que se desee puede servir como vectores, todo lo que se requiere es que se satisfagan los axiomas de los espacios vectoriales. En los ejemplos que siguen, dan cierta idea de la diversidad de espacios vectoriales posibles.

Ejemplos

Ejemplo 1 Todo cuerpo conmutativo es un espacio vectorial sobre sí mismo, lo que muestra que los "escalares" son en este caso también "vectores"; Q, R y C son espacios vectoriales sobre sí mismo.

Ejemplo 2 El cuerpo de los números reales R es un espacio vectorial sobre el cuerpo Q de los números racionales; $\sqrt{2}, \pi, 5\sqrt{2} + \pi/3$, etc., son vectores de este espacio.

Ejemplo 3 Tomemos E = C, K = R y las operaciones

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

donde $a, b, c, d, \lambda \in$ R, entonces C es un espacio vectorial real; es también un espacio vectorial sobre sí mismo. Es importante saber que estas dos estructuras son diferentes.

Ejemplo 4 Tomemos K = R y como E el conjunto de los vectores de origen dado O del espacio ordinario. Definimos la suma de dos vectores por la regla del paralelogramo y el producto de un número real λ por un vector v como el vector obtenido aplicando a v la homotecia de centro O y razón λ. De este modo se obtiene un espacio vectorial real. En este ejemplo está el origen de la noción general de espacio vectorial y explica además el empleo de la palabra "vector" para designar a sus elementos.

Ejemplo 5 Se llama vector de orden n sobre K a toda $n - tupla$ ordenada $(x_1, ..., x_n)$ de elementos del cuerpo conmutativo K. Los elementos x_i se llaman componentes del vector. El elemento x_i recibe entoces el nombre de componente $i - ésima$ del vector. Dos vectores de orden n son iguales si y sólo si sus componentes son iguales. Distinguiremos entre vector fila

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

y vector columna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es fácil dotar al conjunto de estos vectores de estructura de espacio vectorial sobre K. La adición se define por

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

El elemento neutro es $0 = (0, ..., 0)$ y el opuesto de $(x_1, ..., x_n)$ es $(-x_1, ..., -x_n)$. La multiplicación por un escalar $\lambda \in$ K se define por

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Es inmediato comprobar que se cumplen todos los axiomas de espacio vectorial, ya que quedan reducidos a las propiedades elementales entre elementos del cuerpo K. Este espacio vectorial se denota por K^n. Este ejemplo tiene su origen en la geometría analítica al representar un vector por sus componentes en los ejes de coordenadas.

Ejemplo 6 El conjunto

$$R_n[x] = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n : a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in R\right\}$$

de los polinomios de grado a lo sumo n con coeficientes reales y las operaciones

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n) =$$

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

$$\lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + ... + \lambda a_n x^n$$

forman un espacio vectorial real.

Ejemplo 7 El conjunto $\mathcal{F}(R, R) = \{f : f : R \rightarrow R\}$ de las funciones reales de variable real y las operaciones $(f, g) \longmapsto f + g$ y $(\lambda, f) \longmapsto \lambda f$ definidas como sigue

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

forman un espacio vectorial real.

Ejemplo 8 El conjunto $\mathcal{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}(\mathrm{R})$ de las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes reales junto con las operaciones de adición matricial y multiplicación escalar:

$$\begin{aligned} (a_{\mathrm{ij}}) + (b_{\mathrm{ij}}) &= (a_{\mathrm{ij}} + b_{\mathrm{ij}}) \\ \lambda(a_{\mathrm{ij}}) &= (\lambda a_{\mathrm{ij}}) \end{aligned}$$

donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, forman un espacio vectorial real.

Ejemplo 9 El conjunto E de todos los puntos del plano que se encuentran en el primer cuadrante no es un espacio vectorial real. Para ver esto, obsérvese que el punto de coordenadas $(1, 1)$ está en E, pero $(-1)(1, 1) = (-1, -1)$ no lo está.

Ejemplo 10 El conjunto de los polinomios de segundo grado con coeficientes reales no es un espacio vectorial real. Para ver esto, consideremos los siguientes polinomios de segundo grado:

$$p(x) = x^2 \quad \text{y} \quad q(x) = -x^2 + x + 1$$

Entonces, su suma no es un polinomios de segundo grado, pues

$$p(x) + q(x) = x + 1$$

Observación 2 Sería interesante que el lector probara todas los axiomas de los espacios vectoriales en los ejemplos anteriores; es fácil aunque un poco largo.

Propiedades elementales

Como consecuencia de la definición, se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 1 Para cualquier u de E y λ de K, se cumple:

1. 0u = 0
2. λ0 = 0
3. λu = 0 implica λ = 0 o u = 0
4. (-1)u = $-$u

Demostración: (1.) En efecto, aplicando el axioma 8, se tiene

$$0\mathrm{u} = (0 + 0)\mathrm{u} = 0\mathrm{u} + 0\mathrm{u}$$

y, de aquí, por la unicidad del vector cero, se deduce 0u = 0.

(2.) En efecto, aplicando el axioma 4 y el axioma 7, se tiene

$$\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

y, de aquí, por la misma razón de antes, se deduce $\lambda 0 = 0$.

(3.) En efecto, si $\lambda \neq 0$, λ es invertible en K. Entonces, aplicando el axioma 9 y el apartado anterior, se tiene

$$u = 1u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0 = 0$$

y de aquí, se deduce lo que queríamos demostrar.

(4.) En efecto, aplicando el axioma 10 y el axioma 8, y el apartado 1, se tiene

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0$$

de donde, por la unicidad del opuesto de u, se tiene lo que queríamos probar. ■

Producto de espacios vectoriales

El procedimiento que nos ha permitido definir K^n a partir de K puede generalizarse para construir nuevos espacios a partir de espacios conocidos.

Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo conmutativo K. Consideremos el conjunto producto $E_1 \times E_2$ y las dos operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (u_1, u_2) + (v_1, v_2) &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ \lambda(u_1, u_2) &= (\lambda u_1, \lambda u_2) \end{aligned}$$

Entonces con estos datos tenemos un espacio vectorial sobre K que se llama **espacio vectorial producto** $E_1 \times E_2$.

Del mismo modo se define el producto de n espacios vectoriales $E_1, ..., E_n$ sobre un mismo cuerpo K. Las operaciones son en este caso

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \\ \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) &= (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_n) \end{aligned}$$

que definen el espacio vectorial producto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Observación 3 De nuevo hacemos la sugerencia de que el lector haga la prueba de las dos afirmaciones anteriores.

Sabemos que K es un espacio vectorial sobre sí mismo, entonces, tomando $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = K$, se tiene el espacio vectorial K^n sobre K. Este espacio vectorial es el mismo que el del ejemplo 5.

Ejemplos

Ejemplo 11 R^n es un espacio vectorial real.

Ejemplo 12 C^n es un espacio vectorial tanto real como complejo.

Subespacios vectoriales

Si E es un espacio vectorial sobre K, entonces ciertos subconjuntos de E forman por sí mismos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, junto con la adición y multiplicación por escalares definidas en E. En esta sección se estudia con detalle estos subconjuntos.

Definición 2 Dado un espacio vectorial E sobre K, se llama subespacio vectorial de E a todo subconjunto de E que es también un espacio vectorial con las mismas operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas en E.

Teorema 2 Para que un subconjunto S no vacío de E sea un subespacio vectorial de E es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1. para todo $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in S$, $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in S$
2. para todo $\mathrm{u} \in S$ y $\lambda \in \mathrm{K}$, $\lambda\mathrm{u} \in S$

Demostración: Las dos condiciones son suficientes. En efecto, es claro que + es asociativa y conmutativa en S al serlo en E. Además, si $\mathrm{u} \in S$ y $-1 \in \mathrm{K}$, entonces $(-1)\mathrm{u} = -\mathrm{u} \in S$ y además $\mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = 0 \in S$. De este modo S con la suma es grupo conmutativo. Se comprueba en seguida que se cumplen los demás axiomas.

Las dos condiciones son necesarias. En efecto, si S es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en E se cumplen trivialmente las dos condiciones (son el axioma 1 y el axioma 6). ∎

Teorema 3 Un subconjunto S no vacío de E es un subespacio vectorial de E si y sólo si, para todo $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in S$ y todo $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$, se cumple que

$$\lambda\mathrm{u} + \mu\mathrm{v} \in S$$

Demostración: La condición es suficiente. En efecto, si $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in S$, puesto que $1, -1 \in \mathrm{K}$, entonces

$$1\mathrm{u} + 1\mathrm{v} = \mathrm{u} + \mathrm{v} \in S$$

y

$$1\mathrm{u} + (-1)\mathrm{u} = \mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = 0 \in S$$

De esta última relación se sigue que si $\lambda \in \mathrm{K}$, entonces

$$\lambda\mathrm{u} + 0 = \lambda\mathrm{u} \in S$$

Por tanto, por el teorema anterior, se deduce que S es un subespacio vectorial de E.

La condición es necesaria. Si S es un subespacio vectorial es evidente que se satisface la condición indicada. ∎

Observación 4 Hacemos las observaciones siguientes:

1. Todo espacio vectorial E tiene al menos dos subespacios. El propio E es un subespacio y el conjunto $\{0\}$ es otro subespacio denominado subespacio cero; respecto a la inclusión de conjuntos, podemos afirmar que el primero es el mayor de todos los subespacios de E, y el menor, es el segundo. Todo subespacio distinto a estos dos se llama subespacio vectorial propio de E.

2. Distinguiremos la estructura de espacio vectorial de un subconjunto S que es subespacio vectorial de E por S.

Ejemplos

Ejemplo 13 En el espacio vectorial real E de los vectores de origen O del espacio ordinario, se tienen dos clases de subespacios vectoriales (aparte de $\{0\}$ y del propio E): (a) el conjunto de los vectores de origen O situados sobre una recta que pasa por O, y (b) el conjunto de los vectores de origen O situados sobre un plano que pasa por O. Obsérvese que no hay ningún otro subespacio vectorial de E más que los que acabamos de describir.

Ejemplo 14 El conjunto de los números reales R es un subespacio vectorial de C considerado como espacio vectorial real.

Ejemplo 15 Demostrar que el conjunto S de las matrices cuadradas de orden 2 que tienen ceros en la diagonal principal es un subespacio del espacio vectorial real de todas las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales.

Solución: Es claro que $S \neq \emptyset$. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

dos matrices cualesquiera de S y λ un escalar cualquiera. Entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que $A + B$ y λA tienen ceros en la diagonal principal, están en S. Por consiguiente, S es un subespacio vectorial. ∎

Ejemplo 16 Sea n un número natural y supongamos que S consta de la función constante igual 0 y de todas las funciones polinómicas de grado a lo sumo n; esto es, todas las funciones reales de variable real expresables en la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

en donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales. Demostrar que S es un subespacio del espacio vectorial real de todas las funciones reales de variable real.

Solución: Es claro que $S \neq \emptyset$. Sean

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

y

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \\ &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n\end{aligned}$$

tienen la forma adecuada para afirmar que $p + q$ y λp están en S. Por consiguiente, S es un subespacio vectorial. ■

Ejemplo 17 Recuérdese que si f y g son funciones continuas y λ es una constante real, entonces $f + g$ y λf son funciones continuas. Se concluye, pues, que el conjunto de todas las funciones continuas es un subespacio del espacio vectorial real de todas las funciones reales de variable real.

Ejemplo 18 Consideremos un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

o bien, en notación matricial, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Se dice que un vector columna de R^n

$$\mathrm{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

es un vector solución del sistema si $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ es una solución de tal sistema. Demostrar que el conjunto de vectores solución de un sistema homogéneo es un subespacio de R^n. Un sistema lineal se llama homogéneo si todos sus términos independientes son nulos, es decir, $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

Solución: Sea $A\mathrm{x} = 0$ un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas, S el conjunto de vectores solución, y s y t vectores de S. Puesto que s y t son vectores solución del sistema, se tiene

$$A\mathrm{s} = 0 \quad \text{y} \quad A\mathrm{t} = 0$$

Por tanto,

$$A(\mathrm{s} + \mathrm{t}) = A\mathrm{s} + A\mathrm{t} = 0 + 0 = 0$$

y

$$A(\lambda \mathrm{s}) = \lambda (A\mathrm{s}) = \lambda 0 = 0$$

De donde, $\mathrm{s} + \mathrm{s}'$ y $\lambda\mathrm{s}$ satisfacen la ecuación $A\mathrm{x} = 0$. Por tanto, $\mathrm{s} + \mathrm{s}'$ y $\lambda\mathrm{s}$ son vectores solución y, en consecuencia, S es un subespacio vectorial que es habitual denominarlo subespacio solución del sistema $A\mathrm{x} = 0$. ■

Intersección de subespacios vectoriales

Teorema 4 La intersección $\mathrm{S} \cap \mathrm{T}$ de dos subespacios cualesquiera S y T de un espacio vectorial E es también un subespacio de E.

Demostración: La intersección $S \cap T$ se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a S y T. Si $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{S} \cap \mathrm{T}$, entonces $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{S}$ y $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{T}$. Al ser ambos subespacios, se tiene $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathrm{S}$ y $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathrm{T}$ y por tanto $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathrm{S} \cap \mathrm{T}$. Análogamente, todo múltiplo escalar $\lambda\mathrm{u}$ estará en $\mathrm{S} \cap \mathrm{T}$ siempre que lo esté u. ■

Observación 5 Hacemos las siguientes observaciones:

1. Dados dos subespacios S y T de E, $\mathrm{S} \cap \mathrm{T}$ es el mayor subespacio contenido en los dos.

2. En general, si $\mathcal{F}$ es una familia cualquiera de subespacios vectoriales de E, se demuestra del mismo modo que

$$\bigcap_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \mathrm{F}$$

es también un subespacio vectorial de E.

Ejemplos

Ejemplo 19 Determinar la intersección de los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \left\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\} \\ \mathrm{T} &= \left\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x = 0\right\} \end{aligned}$$

de R^3.

Solución: Obsérvese que S y T son subespacios vectoriales de R^3 porque ambos están definidos por ecuaciones lineales homogéneas. Cualquier vector de S es solución de la ecuación lineal

$$x - 2y + z = 0$$

Del mismo modo, cualquier vector de T es solución de la ecuación lineal

$$x = 0$$

Entonces, cualquier vector $(x, y, z) \in \mathsf{S} \cap \mathsf{T}$ debe ser solución del sistema

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\}$$

es decir,

$$\mathsf{S} \cap \mathsf{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathsf{R}^3 : -2y + z = 0 \text{ y } x = 0 \right\}$$

■

Subespacio engendrado por un subconjunto

Definición 3 Dado un subconjunto no vacío A de E, se llama subespacio engendrado por A al menor de los subespacios vectoriales de E que contienen a A. Denotamos por $\langle A \rangle$ el subespacio engendrado por A.

Observación 6 Hacemos las siguientes observaciones:

1. Dicho de otro modo, $\langle A \rangle$ es el subconjunto de E que cumple:

   (a) $\langle A \rangle$ es un subespacio vectorial de E

   (b) $A \subset \langle A \rangle$

   (c) Si S es un subespacio vectorial de E tal que $A \subset \mathsf{S}$, entonces debe cumplirse que $\langle A \rangle \subset \mathsf{S}$.

2. Es evidente que si S es un subespacio vectorial de E, entonces el subespacio engendrado por S es el mismo S.

Teorema 5 Dado un subconjunto no vacío A de E, se cumple

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\mathsf{F} \in \mathcal{F}} \mathsf{F}$$

donde $\mathcal{F}$ es la familia (no vacía, pues E pertenece a la familia) de todos los subespacios vectoriales de E contienen a A.

Demostración: En efecto, si $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subespacios de E que contienen A, entonces es claro que

$$\bigcap_{\mathsf{F} \in \mathcal{F}} \mathsf{F}$$

verifica las tres condiciones indicadas en la última observación. ■

Ejemplos

Ejemplo 20 Demostrar que si v es un vector de E y $A = \{v\}$, entonces $\langle A \rangle = \{\lambda v : \lambda \in K\}$.

Solución: El conjunto $\{\lambda v : \lambda \in K\}$ es un subespacio de E, ya que

$$(\lambda v) + (\mu v) = (\lambda + \mu)v$$

y

$$\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$$

Además, v está en dicho conjunto, ya que

$$v = 1v$$

Por último, es el menor subespacio que contiene a A por construcción. ■

Suma de subespacios vectoriales

Definición 4 Dados dos subespacios vectoriales S y T de E, se llama subespacio suma de S y T denotado por S + T al subespacio vectorial engendrado por el conjunto $S \cup T$. En símbolos

$$S + T = \langle S \cup T \rangle$$

Teorema 6 Dados dos subespacios vectoriales S y T de E, entonces el subespacio suma cumple

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$$

Demostración: En efecto, si tomamos dos elementos cualesquiera de esta forma $s_1 + t_1$ y $s_2 + t_2$, entonces se tiene

$$(s_1 + t_1) + (s_2 + t_2) = s_1 + (t_1 + s_2) + t_2 = (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2)$$

que es otro elemento de la misma forma. Además, también tenemos

$$\lambda(s + t) = \lambda s + \lambda t$$

Por tanto, el conjunto $\{s + t : s \in S, t \in T\}$ es un subespacio de E. Por otra parte, de la manera como se ha definido es claro que es el menor subespacio que contiene a S y T, y en consecuencia tenemos lo que queríamos demostrar. ■

Observación 7 Hacemos las siguientes observaciones importantes:

1. En general, $S \cup T$ no es un subespacio vectorial de E. Para probarlo, consideremos los subespacios vectoriales $S = \{(x, 0) : x \in R\}$ y $T = \{(0, y) : y \in R\}$ de R^2. La suma $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ no pertenece a S ni a T.
2. Dados dos subespacios S y T de E, S + T es el menor subespacio que contiene a ambos.

Observación 8 Un vector v de $S + T$ puede, en general, descomponerse de varias maneras en la forma $s + t$. Si

$$v = s_1 + t_1 = s_2 + t_2$$

entonces

$$w = s_1 - s_2 = t_2 - t_1$$

y el vector w obtenido de esta forma, que pertenece a S y T, también pertenece a su intersección. Recíprocamente, cualquiera que sea $w \in S \cap T$, se tiene

$$v = s + t = (s + x) + (t - x)$$

Esta observación justifica la proposición y definición siguientes.

Teorema 7 Dados dos subespacios vectoriales S y T de un espacio vectorial E, entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. La descomposición de todo vector v de $S + T$ en suma de un vector s de S y de un vector t de T es única
2. Si $s + t = 0$, con $s \in S$ y $t \in T$, se cumple que $s = t = 0$
3. $S \cap T = \{0\}$

Demostración: (1) implica (2). Dado que podemos escribir

$$s + t = 0 + 0$$

se deduce $s = t = 0$.

(2) implica (3). Supongamos que $v \in S \cap T$, podemos escribir

$$0 = v + (-v)$$

donde $v \in S$ y $-v \in T$. De (2) se deduce $v = 0$.

(3) implica (1). Supongamos que tenemos un vector v de $S + T$ expresado de dos maneras

$$v = s_1 + t_1 = s_2 + t_2$$

entonces

$$s_1 - s_2 = t_2 - t_1 = 0$$

pues $s_1 - s_2 = t_2 - t_1$ es un vector de $S \cap T$ que por hipótesis debe ser 0. ■

Definición 5 Dados dos subespacios vectoriales S y T de un espacio vectorial E. Si $S \cap T = \{0\}$, entonces se dice que la suma de subespacios $S + T$ es una suma directa y la designamos con la notación

$$S \oplus T$$

Observación 9 Hacemos las observaciones siguientes:

1. A veces se dice que dos subespacios S y T de un espacio vectorial E son independientes cuando $S \cap T = \{0\}$. En tal caso, su suma es directa.

2. En general, si $S_1, ..., S_m$ es una familia finita de subespacios de E, su suma se define como sigue

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + \cdots + S_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} v_i : v_i \in S_i \right\}$$

que es un subespacio de E. La suma es directa, denotándose por

$$\bigoplus_{i=1}^{n} S_i = S_1 \oplus \cdots \oplus S_m$$

si la descomposición de un vector de este subespacio sólo es posible de una manera. Para ello es necesario y suficiente que la igualdad

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = 0$$

se verifique únicamente escogiendo todos los vectores v_i nulos.

Definición 6 Se dice que S_1 y S_2 son dos subespacios suplementarios de E si todo vector v de E puede escribirse de manera única en la forma

$$v = v_1 + v_2$$

en donde $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$.

Corolario 1 Dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de E son suplementarios si y sólo si

$$E = S_1 \oplus S_2$$

Observación 10 Hacemos las siguientes observaciones importantes:

1. Cuando se cumple

$$E = S_1 \oplus S_2$$

En tal caso se dice que S_1(resp. S_2) es un suplementario de S_2 (resp. S_1) respecto a E. En tal caso, cualquier vector v de E puede escribirse de manera única en la forma

$$v = v_1 + v_2$$

en donde $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$.

2. Es natural plantearse dos preguntas: si S_1 es un subespacio de E, ¿existe un suplementario S_2 de S_1 respecto a E, y, si existe, es único? La respuesta a la segunda pregunta es negativa, según el teorema 21, pero más adelante tenemos el corolario 9. Respecto a la primera, la respuesta es afirmativa según el mismo teorema.

3. No hay que confundir suplementario del subespacio S respecto a E con el complementario del conjunto S respecto a E. En este último caso, no es un subespacio de E ya que no contiene el 0.

Ejemplos

Ejemplo 21 En R^3 se consideran los subespacios S y T engendrados por los conjuntos $\{(2,3,0),(3,1,2)\}$ y $\{(1,-2,2)\}$ respectivamente. Determinar el subespacio S + T y averiguar si es suma directa.

Solución: Según el teorema, un vector (x,y,z) de $S+T$ es de la forma

$$(x,y,z) = \lambda(2,3,0) + \mu(3,1,2) + \delta(1,-2,2)$$

Efectuando operaciones, se obtiene

$$(x,y,z) = (2\lambda + 3\mu + \delta, 3\lambda + \mu - 2\delta, 2\mu + 2\delta)$$

Igualando componentes, se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} E_1: & x = 2\lambda + 3\mu + \delta \\ E_2: & y = 3\lambda + \mu - 2\delta \\ E_3: & z = 2\mu + 2\delta \end{array}\right\}$$

De aquí se obtiene

$$\left.\begin{array}{rr} 3E_1 - 2E_2: & 3x - 2y = 7\mu + 7\delta \\ E_3: & z = 2\mu + 2\delta \end{array}\right\}$$

De aquí se obtiene

$$2(3E_1 - 2E_2) - 7E_3: \quad 6x - 4y - 7z = 0$$

Por consiguiente

$$S + T = \{(x,y,z) \in R^3 : 6x - 4y - 7z = 0\}$$

Para saber si la suma es directa debemos averiguar si los subespacios son o no independientes. Para ello, debemos calcular $S \cap T$. Un vector (x,y,z) de $S \cap T$ debe cumplir

$$(x,y,z) = \alpha(2,3,0) + \beta(3,1,2)$$

y

$$(x,y,z) = \gamma(1,-2,2)$$

Por tanto,

$$\alpha(2,3,0) + \beta(3,1,2) = \gamma(1,-2,2)$$

es decir

$$(2\alpha + 3\beta, 3\alpha + \beta, 2\beta) = (\gamma, -2\gamma, 2\gamma)$$

de donde se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha + 3\beta = \gamma \\ 3\alpha + \beta = -2\gamma \\ 2\beta = 2\gamma \end{array}\right\}$$

Se tiene $\beta = \gamma$. Por tanto, $\alpha = -\beta = -\gamma$. Tomando $\gamma = 1$, se obtiene

$$(1, -2, 2) = -(2, 3, 0) + (3, 1, 2)$$

lo que significa que

$$(1, -2, 2) \in S \cap T$$

Por consiguiente,

$$S \cap T \neq \{0\}$$

y la suma no es directa. ■

Combinaciones lineales

Definición 7 Se llama sistema de vectores de E a cualquier sucesión finita $\mathcal{S}$ de vectores de E. De este modo, $\mathcal{S} = (v_1, v_2, ..., v_m)$, con $v_i \in E$ $(i = 1, ..., m)$, es un sistema de vectores de E.

Observación 11 Se ha de tener cuidado en no confundir el sistema de vectores $(v_1, v_2, ..., v_m)$ con el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ cuyos elementos son los vectores del sistema. Por ejemplo, el sistema $(1, 1, 1)$ de vectores de R tiene como conjunto de vectores $\{1\}$; y los sistemas distintos $(1, 2, 3)$ y $(2, 1, 3)$ de R tienen el mismo conjunto de vectores $\{1, 2, 3\}$.

Cuando escribamos "sistema de vectores" nos referiremos a la sucesión finita de vectores. En cambio, cuando escribamos "vectores del sistema" nos referiremos al conjunto de los vectores de la sucesión.

Definición 8 Dado un sistema $\mathcal{S} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ de vectores de E. Se dice que un vector v de E es combinación lineal de los vectores del sistema $\mathcal{S}$ si existe una sucesión finita $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ de elementos de K tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

Los escalares λ_i $(i = 1, ..., m)$ se denominan coeficientes de la combinación lineal.

También se dice entonces, que el vector v depende linealmente de los vectores del sistema $\mathcal{S}$.

Observación 12 Más en general, si $\mathcal{S} = (v_i)_{i \in I}$ es una familia cualquiera (finita o no) de vectores de E, se dice que un vector v de E es combinación lineal de los vectores de la familia $\mathcal{S}$ si existe una familia $(\lambda_i)_{i \in I}$ de elementos de K tales que sólo un número finito de los escalares λ_i son no nulos y

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

Obsérvese que si $J \subset I$, J es finito y tal que $\lambda_i = 0$ para todo $i \in I - J$, entonces

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i$$

Es evidente que el valor del segundo miembro de la igualdad anterior no depende de J (con tal que J satisfaga las condiciones enunciadas). Como consecuencia tenemos que un vector v de E es combinación lineal de los vectores de la familia $(v_i)_{i\in I}$ si lo es de una subfamilia finita de $(v_i)_{i\in I}$.

Teorema 8 Se deducen inmediatamente de la definición los siguientes resultados:

1. El vector 0 es combinación lineal de los vectores de cualquier sistema.
2. Todo vector es combinación lineal de los vectores de cualquier sistema que lo contiene.
3. Si v es combinación lineal de los vectores del sistema $(v_1, v_2, ..., v_m)$ y si cada v_i $(i = 1, 2, ..., m)$ es combinación lineal de los vectores del sistema $(w_1, w_2, ..., w_p)$, el vector v es combinación lineal de de los vectores del sistema $(w_1, w_2, ..., w_p)$.

Demostración: (1.) Es suficiente elegir todos los coeficientes nulos.
(2.) En efecto,

$$v = 1v$$

y, si hay otros vectores, los afectamos a todos de coeficientes nulos.
(3.) Si

$$v_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij} w_j$$

y

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

entonces, por sustitución y reglas de cálculo, tenemos

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_{1j} w_j \right) + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_{2j} w_j \right) + \cdots + \lambda_m \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_{mj} w_j \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_{k1} \right) w_1 + \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_{k2} \right) w_2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_{kp} \right) w_p \end{aligned}$$

■

Observación 13 Este último resultado se expresa también así: si v depende linealmente de los vectores $v_1, v_2, ..., v_m$, y cada uno de estos depende linealmente de $w_1, w_2, ..., w_p$, el vector v depende linealmente de estos últimos. Por esta razón, este resultado se le conoce como propiedad transitiva de la dependencia lineal.

Ejemplos

Ejemplo 22 Consideremos los vectores $u = (1, 2, -1)$ y $v = (6, 4, 2)$ de R^3. Demostrar que $w = (9, 2, 7)$ es combinación lineal de u y v, y que, en cambio, $w' = (4, -1, 8)$ no es combinación lineal de u y v.

Solución: Para que w sea una combinación lineal de u y v, deben existir los escalares λ_1 y λ_2 tales que $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$, es decir,

$$(9, 2, 7) = \lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(6, 4, 2)$$

o bien,

$$(9, 2, 7) = (\lambda_1 + 6\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

Al igualar las componentes correspondientes, se obtiene el sistema siguiente

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 6\lambda_2 &= 9 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Si se resuelve este sistema, se obtiene la solución $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$. De este modo, tenemos

$$w = -3u + 2v$$

Del mismo modo, para que w' sea una combinación lineal de u y v deben existir λ_1 y λ_2 tales que

$$(4, -1, 8) = \lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(6, 4, 2)$$

o bien,

$$(4, -1, 8) = (\lambda_1 + 6\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

Igualando componentes, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 6\lambda_2 &= 4 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= -1 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema de ecuaciones es incompatible, de modo que no existen esos escalares. Como consecuencia, w' no es una combinación lineal de u y v. ∎

Clausura lineal

Definición 9 Se llama clausura lineal del sistema $\mathcal{S} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ al conjunto de todos los vectores de E que son combinación lineal de los vectores de $\mathcal{S}$. Denotamos este conjunto por $\langle v_1, v_2, ..., v_m \rangle$.

Teorema 9 La clausura lineal de cualquier sistema es un subespacio vectorial de E.

Demostración: En efecto, de las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m) &= (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_m + \mu_m)v_m \\ \delta(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) &= (\delta\lambda_1)v_1 + \cdots + (\delta\lambda_m)v_m \end{aligned}$$

se deduce inmediatamente lo que queremos demostrar. ∎

Definición 10 Un subespacio vectorial S de E se dice que está engendrado por el sistema $\mathcal{S} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ si S es la clausura lineal del sistema, es decir, si se cumple

$$S = \langle v_1, v_2, ..., v_m \rangle$$

También se dice que $\mathcal{S}$ es un sistema generador del subespacio S.

Teorema 10 La clausura lineal de un sistema es el menor subespacio vectorial que contiene al conjunto de los vectores del sistema.

Demostración: Dado un sistema cualquiera $\mathcal{S} = (v_1, v_2, ..., v_m)$. Sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ el conjunto de los vectores de $\mathcal{S}$. Por el teorema 9 la clausura lineal es un subespacio vectorial de E. Para cualquier $v_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ se cumple

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_m$$

con lo que A está contenido en la clausura lineal de $\mathcal{S}$. Si S es cualquier subespacio de E que contiene A, entonces cualquier combinación lineal de los vectores de A es claramente otro vector de S. Por tanto, la clausura lineal de $\mathcal{S}$ está contenido en S y, en consecuencia, es el menor subespacio vectorial que contiene a A. ■

Observación 14 Las nociones y propiedades anteriores pueden ampliarse al caso de una familia cualquiera $(v_i)_{i \in I}$, finita o no, de vectores de E. Se llama clausura lineal de una familia $(v_i)_{i \in I}$ al menor subespacio vectorial que la contiene. Puede demostrarse, sin ninguna dificultad, que dicha clausura lineal es la intersección de la familia de subespacios que contienen al conjunto de vectores de la familia en consideración. Finalmente, se demuestra que dicha clausura lineal es el subespacio de las combinaciones lineales de cada subfamilia finita de $(v_i)_{i \in I}$.

Ejemplos

Ejemplo 23 Dado el sistema (e_1, e_2, e_3) de vectores de R^3, siendo $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$. Determinar la clausura lineal de este sistema.

Solución: Es claro que $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset R^3$. Por otra parte, tenemos que todo vector (x, y, z) de R^3 se puede escribir como

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

es decir,

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

lo cual es una combinación lineal de e_1, e_2 y e_3. Por tanto, $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = R^3$. ■

Ejemplo 24 Los polinomios $1, x, x^2, ..., x^n$ engendran al espacio vectorial $R_n[x]$ (véase ejemplo 6), pues cualquier polinomio $p(x)$ de $R_n[x]$ se puede escribir como

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

lo cual es una combinación lineal de $1, x, x^2, ..., x^n$.

Ejemplo 25 Determinar si $v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,0,1), v_3 = (2,1,3)$ engendran R^3.

Solución: Es suficiente determinar si un vector arbitrario $v = (x,y,z)$ de R^3 se puede escribir como una combinación lineal de v_1, v_2 y v_3

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

Si expresamos esta ecuación en términos de componentes, se tiene

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(2,1,3)$$

o bien,

$$(x,y,z) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)$$

o bien,

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & y \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & z \end{array}\right\}$$

Por consiguiente, el problema se reduce a determinar si este sistema es o no compatible para todos los valores de x, y y z. Aunque más adelante daremos métodos más operativos para resolver estas cuestiones, de momento nos contentamos con afirmar que el vector $(1,0,0)$ de R^3 no es una combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. En efecto, puede comprobarse que el sistema siguiente

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

es incompatible. Por consiguiente, los vectores v_1, v_2 y v_3 engendran un subespacio vectorial distinto de R^3. ■

Ejemplo 26 ¿Podemos determinar x de manera que el vector $(-1,2,5,x)$ pertenezca al subespacio de Q^4 engendrado por $(4,-2,1,7)$ y $(1,0,2,4)$?

Solución: Para que $(-1,2,5,x) \in \langle(4,-2,1,7),(1,0,2,4)\rangle$ deben existir dos escalares λ_1 y λ_2 de Q tales que

$$(-1,2,5,x) = \lambda_1(4,-2,1,7) + \lambda_2(1,0,2,4)$$

o bien,

$$(-1,2,5,x) = (4\lambda_1 + \lambda_2, -2\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, 7\lambda_1 + 4\lambda_2)$$

Igualando componentes, se tiene

$$\left.\begin{array}{r} 4\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ 7\lambda_1 + 4\lambda_2 = x \end{array}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones del sistema se obtiene $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$. Estos valores satisfacen también la tercera ecuación del sistema. Por tanto, debe ocurrir

$$x = -7 + 12 = 5$$

■

Sistemas equivalentes. Transformaciones equivalentes

Definición 11 Se dice que dos sistemas $(v_1,...,v_m)$ y $(w_1,...,w_p)$ de E son equivalentes, denotándolo por $(v_1,...,v_m) \sim (w_1,...,w_p)$, cuando sus clausuras lineales son iguales, es decir, cuando

$$\langle v_1,...,v_m\rangle = \langle w_1,...,w_p\rangle$$

Teorema 11 Dos sistemas son equivalentes si y sólo si todo vector de cada sistema es combinación lineal de los vectores del otro.

Demostración: Es inmediato a partir de la definición de clausura lineal de un sistema. ■

Observación 15 Es fácil demostrar también que la relación definida anteriormente es de equivalencia.

Teorema 12 La clausura lineal de un sistema no cambia cuando se añaden nuevos vectores al sistema que sean combinación lineal de los primeros.

Demostración: Dado un sistema de vectores $(v_1,...,v_m)$, si

$$w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

entonces

$$\langle v_1,...,v_m,w\rangle = \langle v_1,...,v_m\rangle$$

pues

$$\begin{aligned}\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m + \mu w &= \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \\ &= (\mu_1 + \lambda_1) v_1 + \cdots + (\mu_m + \lambda_m) v_m\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m + 0w$$

así con cualquier otro vector añadido. ■

Observación 16 Hacemos las siguientes observaciones:

1. Del teorema anterior se sigue de forma inmediata que

$$(v_1,...,v_m,w) \sim (v_1,...,v_m)$$

   si w es combinación lineal de $v_1,...,v_m$.

2. Después de este resultado, cabe preguntarse en seguida si será posible encontrar un sistema de vectores equivalente con un número menor de vectores. Resolveremos esta cuestión al estudiar la independencia lineal de vectores.

Definición 12 A continuación definimos ciertas transformaciones que aplicadas sobre un sistema de vectores proporcionan sistemas equivalentes. Estas operaciones se llaman transformaciones elementales y son las siguientes:

T1: Permutar dos vectores cualesquiera

$$(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ...v_m) \sim (v_1, ..., v_j, ..., v_i, ...v_m) \quad (i \neq j)$$

T2: Multiplicar un vector cualquiera por un escalar λ distinto de cero

$$(v_1, ..., v_i, ...v_m) \sim (v_1, ..., \lambda v_i, ...v_m)$$

T3: Sumar a un vector cualquiera un múltiplo escalar de otro vector

$$(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ...v_m) \sim (v_1, ..., v_i + \lambda v_j, ..., v_j, ...v_m) \quad (i \neq j)$$

Teorema 13 La clausura lineal de los vectores de un sistema no cambia sometiendo el sistema a una o varias transformaciones elementales.

Demostración: Supongamos que el sistema $\mathcal{S}' = (w_1, ..., w_m)$ es el resultado de aplicar una de las transformaciones elementales sobre el sistema dado $\mathcal{S} = (v_1, ..., v_m)$. Se trata de probar que $\langle w_1, ..., w_m \rangle = \langle v_1, ..., v_m \rangle$, o lo que es lo mismo, que $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$. Probaremos que todo vector v, combinación lineal del sistema $(v_1, ..., v_m)$, es también combinación lineal del nuevo sistema $(w_1, ..., w_m)$.

Si $\mathcal{S}'$ se obtiene de $\mathcal{S}$ por T1, entonces esto es evidente por la conmutatividad de la suma, pues los w_j son idénticos a los v_i, salvo el orden.

Si $\mathcal{S}'$ se obtiene de $\mathcal{S}$ por T2, entonces reemplazamos v_i por $w_i = \lambda v_i$ ($\lambda \neq 0$), sin modificar los restantes vectores. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_m v_m \\ &= \lambda_1 w_1 + \cdots + \frac{\lambda_i}{\lambda} w_i + \cdots + \lambda_m w_m \end{aligned}$$

Si $\mathcal{S}'$ se obtiene de $\mathcal{S}$ por T3, entonces reemplazamos v_i por $w_i = v_i + \lambda v_j$ ($i \neq j$), sin modificar los otros vectores. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_m v_m \\ &= \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_i w_i + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) w_j + \cdots + \lambda_m w_m \end{aligned}$$

Por otra parte, las transformaciones elementales son reversibles, ya que las operaciones inversas son del mismo tipo. Por tanto, los sistemas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son, pues, equivalentes. Además, la transitividad de la relación $\sim$ demuestra que una sucesión de transformaciones (tal que cada una opera sobre el sistema que resulta de la precedente) aplica un sistema a otro de equivalente. ∎

Ejemplos

Ejemplo 27 Demostrar que los sistemas $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$ y $\mathcal{S}' = (w_1, w_2)$ de R^3 son equivalentes,siendo $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (0, 1, 1), w_1 = (1, 0, 1)$ y $w_2 = (2, -1, 1)$.

Solución: Para ello, aplicaremos transformaciones elementales a $\mathcal{S}$ hasta obtener $\mathcal{S}'$. Aplicando T3, se obtiene

$$(v_1, v_2) \sim (v_1 - v_2, v_2)$$

Ahora, aplicando T2,

$$(v_1 - v_2, v_2) \sim (v_1 - v_2, -v_2)$$

Finalmente, aplicando T3,

$$(v_1 - v_2, -v_2) \sim 5(v_1 - v_2, -v_2 + 2(v_1 - v_2))$$

Por la transitividad de la relación se deduce

$$(v_1, v_2) \sim (v_1 - v_2, -v_2 + 2(v_1 - v_2))$$

es decir,

$$w_1 = v_1 - v_2$$

y

$$w_2 = -v_2 + 2(v_1 - v_2)$$

Por consiguiente, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son equivalentes. ■